ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 9

3.8 Нули, полюсы и вычеты дискретной передаточной функции (Сергиенко, с. 197)

Так же, как и в аналоговом случае, разложив числитель и знаменатель передаточной функции (3.54) на множители, можно получить выражение

$$W(z) = k\,\frac{\left(1 - z_1 z^{-1}\right)\left(1 - z_2 z^{-1}\right)\ldots\left(1 - z_m z^{-1}\right)}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)\ldots\left(1 - p_n z^{-1}\right)}. \qquad (3.57)$$

Здесь $k = b_0$ – коэффициент усиления, z_i – нули передаточной функции, p_i – полюсы передаточной функции. Нули и полюсы, так же, как и в аналоговом случае могут быть действительными или составлять комплексно-сопряженные пары.

Так же, как и в аналоговом случае, еще одним способом преобразования дискретной передаточной функции (3.54) является ее представление в виде суммы простых дробей. При отсутствии кратных (одинаковых) полюсов и $m \prec n$ такое представление имеет вид

$$W(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \ldots + \frac{r_n}{1 - p_n z^{-1}}. \qquad (3.58)$$

Здесь по-прежнему p_i – полюсы передаточной функции. Числа r_i называются вычетами. Вычеты, соответствующие комплексно-сопряженным полюсам, также являются комплексно-сопряженными.

При наличии кратных (одинаковых) полюсов передаточной функции ее разложение на сумму простых дробей сложнее. Каждый l-кратный полюс дает l слагаемых следующего вида

$$\frac{r_{i1}}{1 - p_i z^{-1}} + \frac{r_{i2}}{1 - p_i z^{-1}} + \ldots + \frac{r_{il}}{\left(1 - p_i z^{-1}\right)^l}. \qquad (3.59)$$

3.9 Расчет импульсной характеристики дискретной системы

Так же, как и для непрерывной системы, будем находить импульсную характеристику, используя представление передаточной функции в виде суммы простых дробей. Можно установить, что каждое слагаемое вида

$$\frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}} = \frac{r_i z}{z - p_i}$$

даст слагаемое импульсной характеристики

$$r_i p_i^k \text{ при } k \ge 0.$$

Мы уже рассматривали такую функцию. Это дискретная экспоненциальная функция (см. (3.29)). Каждая i-я пара комплексно-сопряженных полюсов r_i, p_i ; $r_i^*, p*$ даст пару слагаемых в виде комплексно-сопряженных экспонент указанного вида. Эта пара, в свою очередь, по формуле Эйлера, может быть преобразована в функцию косинуса с экспоненциально изменяющейся амплитудой.

$$r_i p_i^{\,k} + r_i^*(p_i^*)^k = 2|r_i||p_i|^k cos(k \cdot \arg p_i + \arg(r_i)) \,, \tag{3.60}$$

где k – неотрицательное целое число.

Каждый l-кратный полюс p_i дает в импульсной характеристике l слагаемых следующего вида

$$A_0 p_i^k + A_1 k p_i^k + A_2 k^2 p_i^k + \ldots + A_{l-1} k^{l-1} p_i^k \,. \tag{3.61}$$

Коэффициенты A_i представляют собой рациональные дроби и для каждой кратности рассчитываются индивидуально (Сергиенко, с. 200).

3.10 Устойчивость дискретных систем

Определение устойчивости дискретных систем остается таким же, как и для непрерывных: *дискретная система называется устойчивой, если при нулевом входном сигнале выходной сигнал затухает при любых начальных условиях* $\lim_{k\to\infty} y(k) = 0$ *при* $x(k) = 0$.

Это требование равносильно требованию затухания импульсной характеристики $\lim_{k\to\infty} w(k) = 0$. Из предыдущего рассмотрения следует, что каждое слагаемое импульсной характеристики дискретной линейной системы в общем случае имеет вид

$$A_i p_i^k k^n \,,$$

где p_i – полюсы передаточной функции; n – неотрицательное целое число; A_i – константа.

Эти слагаемые с ростом k будут затухать, если каждый полюс p_i по модулю меньше единицы, то есть $|p_i| \prec 1$. Это значит, что все полюсы передаточной функции находятся на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса. Итак: *дискретная линейная система устойчива тогда, когда все полюсы передаточной функции находятся на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса*.

3.11 Представление дискретной системы в пространстве состояний

Сущность представления дискретной системы в пространстве состояний та же, что и в аналоговом случае. Напомним: пространством состояний называется такое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы. Известно, что если система описывается разностным уравнением n-го порядка, то пространство состояний этой системы будет иметь размерность n.

Итак: *Размерность пространства состояний, соответствующее разностному уравнению, равна порядку этого уравнения.*

Аналогично непрерывной системе, для представления в пространстве состояний исходное разностное уравнение преобразовывают в систему разностных уравнений первого порядка. Обозначая в качестве переменных состояния переменные, сдвинутые относительно друг друга на один такт квантования, получаем из разностного уравнения (3.46) систему (см. (3.26))

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}(k+1) &= A_{\partial}\vec{x}(k) + B_{\partial}u(k) \\ y(k) &= C_{\partial}\vec{x}(k) + du(k) \end{aligned}\right\} .$$

(3.61)

Здесь $\vec{x}(k)$ – вектор состояния; $A_{\partial}, B_{\partial}, C_{\partial}$ – матрицы соответствующих размерностей; d – коэффициент. Матрицы $A_{\partial}, B_{\partial}, C_{\partial}$ отличаются от соответствующих матриц непрерывной системы.

Система (3.61) легко может описывать и систему со многими входами и выходами.

Преимущества представления дискретных систем в пространстве состояний остаются теми же, что и для непрерывных систем: *компактность записи, возможность исследовать динамические свойства системы алгебраическими методами и приспособленность к машинному решению уравнений*. Последнее преимущество для дискретных систем наиболее ярко выражено: система (3.61) представляет собой прямой алгоритм решения.